Лабораторная работа 1

Решение задачи о назначениях венгерским методом

Постановка задачи: пусть имеется n видов работ и n исполнителей, каждый из которых может выполнить любую из этих работ; c_{ij}— эффективность выполнения i-ой работы j-ым исполнителем, $i,j = 1,n$. Из параметров c_{ij} можно составить $(n \times n)$ матрицу стоимостей (эффективностей) C. Найти такую расстановку исполнителей, чтобы суммарный эффект их труда был наибольшим.

Математическая модель задачи: введем переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{работа } i \text{ выполняется } j - \text{м исполнителем}, \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Получаем задачу:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (1), \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (2), \quad i, j = \overline{1,n}$$

Ограничения (1) означают, что на каждую работу должен быть назначен только один исполнитель. Ограничения (2) означают, что каждый исполнитель выполняет только одну работу.

Определение. Система нулевых элементов матрицы, обладающая тем свойством, что никакая пара из них не лежит в одной строке или в одном столбце, называется *системой независимых нулей (СНИ).*

Идея метода.

Венгерский метод состоит в преобразовании исходной задачи с матрицей C в эквивалентную ей задачу минимизации с матрицей C''. Если в матрице C'' имеется система из n независимых нулей, то решением задачи будет матрица X, у которой на местах, соответствующим независимым нулям, стоят 1, а остальные элементы являются нулевыми. Таким образом алгоритм направлен на построение СНН путем эквивалентных , преобразований матрицы C''.

Алгоритм метода.

0. Преобразуем матрицу C в матрицу C'' следующим образом:

a) $c'_{ij} = \max\{c_{ij}\} - c_{ij}, \quad i, j = \overline{1,n};$;

b) $c'' = c'_{ij} - \min\limits_{1 \le j \le n}\{c'_{ij}\}, \quad i, j = \overline{1,n}.$

Приходим к задаче: $L'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c''_{ij}x_{ij} \to \min \quad \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i, j = \overline{1,n}$

1. Строим систему независимых нулей, помечая их *. Пусть число таких элементов равно k. Если $k=n$, то пишем ответ — матрицу X и $L(X)$. Если $k \neq n$, то помечаем столбцы, содержащие 0* сверху знаком «+». Все элементы в этих столбцах назовем *выделенными элементами (ВЭ)* (аналогично, так назовем элементы и в строках со знаком «+»).

2. Среди невыделенных элементов ищутся нулевые. Если они есть, то помечаем один из них 0' и переходим на 3. Если нет, то — 5.

3. Если в строке, содержащей только что найденный (У нет 0*, то — переход

на 4. Иначе с соответствующего столбца снимается знак выделения и выделяется строка, содержащая 0' и осуществляется переход на 2.

4. Начиная с только что найденного 0' строится цепочка нулевых элементов матрицы по следующему правилу: исходный 0'; 0*, лежащий в одном столбце с этим 0'; 0', лежащий в строке с только что пройденным 0* и т.д. Заканчивается цепочка 0'. После построения цепочки штрихи у нулевых элементов этой цепочки заменяются на *, старые * в цепочке уничтожаются. Убираются знаки выделения строк и столбцов. * не входящие в цепочку переписываются. Далее переход на 1.

5. Ищем минимальный ненулевой неВЭ и обозначаем h. Затем, прибавляем h к элементам, которые стоят на пересечении выделенных строк и выделенных столбцов; отнимаем h от элементов, которые стоят на пересечении невыделенных строк и не выделенных столбцов; остальные элементы переписываем без изменений. Возвращаемся к 2.

<u>Пример.</u> Решить задачу о назначениях с матрицей C венгерским методом.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to C' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \to C'' = \begin{pmatrix} 0^* & 2 & 4 & 0' \\ 5 & 0^* & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0^* & 4 \\ 6 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

1. В матрице C'' строим и подсчитываем число независимых нулей; $k = 3 < 4$, значит столбцы, содержащие 0* помечаем +.

2. Среди невыделенных элементов ищется нулевой, это элемент c_{14} помечаем его '.

3. В первой строке есть 0*, поэтому с первого столбца надо снять знак выделения $\oplus$ и отметить знаком + первую строку.

4. Среди неВЭ нет нулевых.

5. Выбираем минимальный элемент среди неВЭ $c_{31} = h = 3$ и

—прибавляем h к элементам, которые стоят на пересечении ВЭ строк и ВЭ столбцов;

—вычитаем h от элементов, которые стоят на пересечении неВЭ строк и неВЭ столбцов;

— оставляем без изменения остальные элементы. Получаем матрицу:

$$C''' = \begin{pmatrix} 0^* & 5 & 7 & 0' \\ 2 & 0^* & 3 & 3 \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} + \\ \\ + \\ \\ \end{matrix}$$

2. Среди неВЭ есть нулевой: $c_{31} = 0$, помечаем его '.

3. В третьей строке существует 0*, значит снимаем с третьего столбца знак $\oplus$

и помечаем третью строку +.

2. Среди неВЭ нет нулей.

5. Выбираем в C''' $c_{21} = h = 2$ и снова строим новые нули, получаем матрицу:

$$C^{IV} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0^* & 7 & 7 & 0' \\ 0' & 0^* & 1 & 1 \\ 0' & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0' & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \end{array}$$

2. Ищем 0 среди НЭ: $c_{21} = 0$; помечаем его 0'.

3. Во 2 строке есть 0*, снимаем знак ⊕ со 2 столбца и помечаем знаком + 2 строку.

2. В 4 строке есть $c_{42}=0$, помечаем его 0'.

3. В 4 строке нет 0^*.

4. Строим цепочку, начиная с c_{42}: $\{c_{42}, c_{22}, c_{21}, c_{11}, c_{14}\}$ В цепочке заменяем на *, а старые * убираем. Получаем C^{IV}

$$C^{V} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 0^* \\ 0^* & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0^* & 1 \\ 1 & 0^* & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Подсчитываем число $k = 4 = n$, значит записываем ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L(X) = 8 + 4 + 9 + 7 = 28(ед.)$$

Задание: Решить задачу о назначениях венгерским методом.

1) $C = \begin{pmatrix} 16 & 27 & 7 & 10 \\ 30 & 30 & 26 & 9 \\ 13 & 4 & 22 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 6 \\ 30 & 29 & 9 & 5 \\ 16 & 24 & 14 & 6 \\ 13 & 28 & 4 & 25 \end{pmatrix}$ 3) $C = \begin{pmatrix} 27 & 20 & 29 & 26 \\ 13 & 24 & 15 & 15 \\ 29 & 12 & 22 & 4 \\ 20 & 27 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

4) $C = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 24 & 26 \\ 15 & 20 & 29 & 26 \\ 4 & 10 & 27 & 30 \\ 9 & 16 & 29 & 30 \end{pmatrix}$ 5) $C = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 2 & 13 \\ 27 & 10 & 4 & 5 \\ 3 & 16 & 25 & 24 \\ 28 & 11 & 17 & 10 \end{pmatrix}$ 6) $C = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 9 & 20 \\ 13 & 4 & 24 & 26 \\ 22 & 24 & 30 & 27 \\ 25 & 12 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

7) $C = \begin{pmatrix} 30 & 24 & 11 & 12 \\ 26 & 4 & 14 & 20 \\ 27 & 14 & 29 & 10 \\ 6 & 14 & 28 & 8 \end{pmatrix}$ 8) $C = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 3 & 6 \\ 23 & 8 & 13 & 27 \\ 30 & 1 & 5 & 24 \\ 8 & 26 & 7 & 28 \end{pmatrix}$ 9) $C = \begin{pmatrix} 20 & 17 & 27 & 28 \\ 13 & 21 & 19 & 29 \\ 29 & 30 & 24 & 7 \\ 11 & 19 & 30 & 6 \end{pmatrix}$

10) $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 & 6 \\ 30 & 29 & 9 & 5 \\ 16 & 24 & 14 & 6 \\ 13 & 28 & 4 & 25 \end{pmatrix}$ 11) $C=\begin{pmatrix} 12 & 11 & 23 & 29 \\ 22 & 21 & 22 & 8 \\ 9 & 13 & 2 & 28 \\ 26 & 18 & 25 & 4 \end{pmatrix}$ 12) $C=\begin{pmatrix} 20 & 24 & 4 & 2 \\ 10 & 10 & 15 & 27 \\ 15 & 15 & 12 & 25 \\ 2 & 6 & 23 & 5 \end{pmatrix}$

13) $C=\begin{pmatrix} 29 & 23 & 10 & 11 \\ 25 & 3 & 13 & 19 \\ 26 & 13 & 28 & 9 \\ 5 & 13 & 27 & 7 \end{pmatrix}$ 14) $C=\begin{pmatrix} 9 & 15 & 8 & 19 \\ 12 & 3 & 23 & 25 \\ 21 & 23 & 29 & 26 \\ 24 & 11 & 10 & 23 \end{pmatrix}$ 15) $C=\begin{pmatrix} 20 & 21 & 1 & 12 \\ 26 & 9 & 3 & 4 \\ 2 & 15 & 24 & 23 \\ 27 & 10 & 16 & 9 \end{pmatrix}$

16) $C=\begin{pmatrix} 19 & 25 & 23 & 26 \\ 14 & 19 & 28 & 25 \\ 3 & 9 & 26 & 29 \\ 8 & 15 & 27 & 31 \end{pmatrix}$ 17) $C=\begin{pmatrix} 36 & 16 & 28 & 25 \\ 12 & 23 & 14 & 14 \\ 28 & 11 & 21 & 3 \\ 19 & 26 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ 18) $C=\begin{pmatrix} 15 & 26 & 16 & 9 \\ 29 & 29 & 25 & 8 \\ 12 & 3 & 21 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

19) $C=\begin{pmatrix} 11 & 18 & 21 & 4 \\ 8 & 14 & 15 & 16 \\ 13 & 17 & 28 & 27 \\ 24 & 15 & 6 & 14 \end{pmatrix}$ 20) $C=\begin{pmatrix} 16 & 10 & 17 & 27 \\ 30 & 9 & 26 & 30 \\ 13 & 3 & 22 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ 21) $C=\begin{pmatrix} 8 & 16 & 28 & 27 \\ 12 & 20 & 26 & 15 \\ 19 & 29 & 23 & 6 \\ 10 & 18 & 29 & 5 \end{pmatrix}$

22) $C=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 5 \\ 29 & 28 & 8 & 4 \\ 15 & 23 & 13 & 5 \\ 12 & 27 & 3 & 24 \end{pmatrix}$ 23) $C=\begin{pmatrix} 11 & 10 & 22 & 26 \\ 21 & 17 & 21 & 7 \\ 8 & 12 & 1 & 27 \\ 25 & 20 & 25 & 4 \end{pmatrix}$ 24) $C=\begin{pmatrix} 19 & 23 & 3 & 1 \\ 9 & 9 & 14 & 26 \\ 14 & 14 & 11 & 24 \\ 1 & 5 & 22 & 4 \end{pmatrix}$

25) $C=\begin{pmatrix} 20 & 6 & 27 & 24 \\ 31 & 23 & 16 & 9 \\ 26 & 34 & 8 & 31 \\ 26 & 15 & 28 & 27 \end{pmatrix}$ 26) $C=\begin{pmatrix} 14 & 21 & 18 & 22 \\ 15 & 3 & 19 & 9 \\ 31 & 21 & 37 & 18 \\ 5 & 17 & 25 & 15 \end{pmatrix}$ 27) $C=\begin{pmatrix} 16 & 27 & 17 & 10 \\ 30 & 30 & 26 & 9 \\ 13 & 4 & 22 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

28) $C=\begin{pmatrix} 26 & 37 & 27 & 20 \\ 40 & 40 & 36 & 19 \\ 23 & 14 & 32 & 13 \\ 13 & 11 & 15 & 14 \end{pmatrix}$ 29) $C=\begin{pmatrix} 25 & 21 & 22 & 29 \\ 32 & 31 & 33 & 30 \\ 35 & 21 & 32 & 33 \\ 31 & 23 & 29 & 27 \end{pmatrix}$ 30) $C=\begin{pmatrix} 47 & 30 & 39 & 36 \\ 23 & 34 & 25 & 25 \\ 39 & 22 & 32 & 14 \\ 30 & 37 & 23 & 27 \end{pmatrix}$